

ΜΑΘΗΜΑ / ΤΑΞΗ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ο.Π. / Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 26 – 08 – 2025

ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Α**A1.** Έστω $P(x) = \alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$ πολυώνυμο του x και $x_0 \in \mathbb{R}$.Να αποδείξετε ότι: $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$.**Μονάδες 6****A2. i)** Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού A, B αντιστοίχως, τότε:**α)** πότε οι συναρτήσεις f, g είναι ίσες;**β)** ποιο το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g \circ f$;**Μονάδες 2 + 2 = 4****ii)** Να συμπληρώσετε τις επόμενες ισότητες:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(f(x)) - 1}{f(x)} \right) = \dots, \text{ όταν } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$

2. $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{1}{(x - x_0)^{2v}} \right) = \dots, v \in \mathbb{N}^*.$

3. $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{g(x)}{f(x)} \right) = \dots, \text{ όταν } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty, \text{ και } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0.$

Μονάδες 1 + 1 + 2 = 4**A3. α)** Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;**β)** Πότε μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται 1 – 1 στο A ;**γ)** Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.**Μονάδες 1 + 2 + 3 = 6****A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση και δίπλα στο γράμμα τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.**α)** Μια άρτια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A , μπορεί να είναι γνησίως φθίνουσα στο A .**β)** Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο σύνολο A , τότε είναι και 1–1 σε αυτό.**γ)** Ισχύει πάντα ότι: $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \right).$

δ) Αν $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 , τότε ισχύει και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$.

ε) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{|f(x)|} = 0$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^3 + x + 2$.

B1. α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Να δείξετε ότι ισχύει $f(x^2 + 1) > f(2x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{1\}$.

Μονάδες 4 + 3 = 7

B2. Αν ισχύει $\eta\mu^3 x + \eta\mu x + 2 = 0$, για $x \in (-\pi, 0)$, να δείξετε ότι $x = -\frac{\pi}{2}$.

Μονάδες 5

B3. Να υπολογίσετε τα επόμενα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2}{x}$

ii) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{|f(x)|}$

iii) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\eta\mu(f(x))}{f(x)}$.

Μονάδες 2 + 3 + 3 = 8

B4. Να βρείτε τη μονοτονία της συνάρτησης $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$(f \circ g)(x) = x + 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Να βρείτε συνάρτηση f τέτοια, ώστε να ισχύει $(f \circ g)(x) = e^{3x} + 3e^{2x} + 5e^x + 6$,

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όταν $g(x) = e^x + 1$.

Μονάδες 5

Αν $f(x) = x^3 + 2x + 3$, $x \in \mathbb{R}$, τότε:

Γ2. Να δείξετε ότι η f είναι 1-1 στο $\mathbb{R}$ και ότι ισχύει $f(|x|) > f(|\eta\mu x|)$, για κάθε $x \neq 0$.

Μονάδες 4 + 2 = 6

Γ3. Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 15}{x - 2}$

ii) $\lim_{x \rightarrow -1} \left[f(x) \cdot \eta\mu \frac{1}{f(x)} \right]$

iii) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{|f(x) + 2| - |f(x) - 3| + 1}{x + 1}$.

Μονάδες 2 + 3 + 3 = 8

Γ4. Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, με $\lambda > 2$, ώστε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \lambda^2 + 5\lambda - 9}{x}$ να είναι

πραγματικός αριθμός (μονάδες 4) και στη συνέχεια να υπολογίσετε το παραπάνω όριο (μονάδες 2).

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν:

- $f^3(x) + f(x) = x - 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$.

Δ1. α. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β. Να λύσετε την ανίσωση: $f(e^{2x} + e) < f[e^x(e + 1)]$.

Μονάδες 4 + 3 = 7

Δ2. Να δείξετε ότι:

i) $\ell = 0$.

ii) $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{f(x)}{x - 1} \right] = 1$.

Μονάδες 3 + 2 = 5

Δ3. Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση g για την οποία ισχύει:

$$g(x) = \frac{\kappa}{|f(x)|}, \kappa \neq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} - \{1\}.$$

α. Για τις διάφορες τιμές του κ , να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$.

β. Αν $\kappa < 0$, να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{\eta\mu(\sqrt{x+3}-2)}{x-1} + \frac{1}{g^{2025}(x)} + |g(x)| \right].$$

Μονάδες 3 + 3 = 6

Δ4. Να δείξετε ότι :

i) $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{f(x) - f\left(2 - \frac{1}{x}\right)} \right] = +\infty$

ii) $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{2g^2(x)+1}{g^2(x)+2} \cdot \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1-\sin\theta}{\theta^2} \right] = 1, \text{ αν } \kappa < 0.$

Μονάδες 3 + 4 = 7